В каком виде искать частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$?

После долгих раздумий я принял решение создать отдельную справочную таблицу для подбора частного решения неоднородного ДУ. В методический материал сведены практически все типовые ситуации, которые могут встретиться на практике, кроме того, приведены случаи подбора частного решения для уравнений повышенной сложности.

Как всегда объяснения ведутся на конкретных примерах с минимумом формул и параметров. **Обязательно прочитайте выводы на последней странице!!!**

I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля.

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + y' - 2y = f(x)$

Для соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ и найдём его корни: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$

Итак, получены различные действительные корни, среди которых нет нуля.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?**
1. $f(x) = 4$ (или другая ненулевая константа)	$\tilde{y} = A$
2. $f(x) = 3x - 1$	$\tilde{y} = Ax + B$
3. $f(x) = x^2 - x$	$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$
4. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 1$	$\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

Примечание: обратите внимание, что когда в правой части $f(x)$ находится неполный многочлен, то частное решение подбирается без пропусков степеней, пример: $f(x) = -5x$

Это многочлен первой степени, и в нём отсутствует константа. Однако при подборе частного решения константу пропускать нельзя, то есть частное решение необходимо искать в виде $\tilde{y} = Ax + B$

5. $f(x) = 2e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{3x} не совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -2$ или $\lambda_2 = 1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y} = Ae^{3x}$
6. $f(x) = (2x - 3)e^{-x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{-1 \cdot x}$ не совпадает с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -2$ или $\lambda_2 = 1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-x}$
7. $f(x) = \frac{x}{2}e^{-2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{-2x} **совпал** с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -2$. В подобной ситуации «штатный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-2x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{-2x}$, то есть, искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-2x}$

8. $f(x)=e^{x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{1}\cdot x}$ **совпал** с корнем характеристического уравнения $\lambda_2=1$. Аналогично: «штатный» подбор $\tilde{y}=Ae^{x}$ домножаем на «икс»: $\tilde{y}=x\cdot Ae^{x}$, то есть ищем частное решение в виде: $\tilde{y}=Axe^{x}$
Примечание: обратите внимание, что опять же в случае неполных многочленов степени не теряются, например, если $f(x)=7x^2e^{5x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени и константа), то частное решение следует искать в виде $\tilde{y}=(Ax^2+Bx+C)e^{5x}$. Если $f(x)=(1-x^2)e^{-2x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени), то частное решение ищем в виде $\tilde{y}=x(Ax^2+Bx+C)e^{-2x}=(Ax^3+Bx^2+Cx)e^{-2x}$	
9. $f(x)=\sin x$	$\tilde{y}=A\cos x+B\sin x$
10. $f(x)=-3\cos 2x$	$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$
11. $f(x)=2\cos 3x-4\sin 3x$	$\tilde{y}=A\cos 3x+B\sin 3x$
Примечание: в подборе частного решения **всегда должен присутствовать** **и синус и косинус** (даже если в правую часть $f(x)$ входит **только** синус или **только** косинус). Редко, но встречаются следующие похожие случаи:	
12. $f(x)=-x\sin 5x$	$\tilde{y}=(Ax+B)\cos 5x+(Cx+D)\sin 5x$
13. $f(x)=(x-1)\cos\dfrac{x}{2}$	$\tilde{y}=(Ax+B)\cos\dfrac{x}{2}+(Cx+D)\sin\dfrac{x}{2}$
14. $f(x)=x\cos x+2\sin x$	$\tilde{y}=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$
И заключительные примеры, здесь тоже всё прозрачно:	
15. $f(x)=2e^{x}\sin 2x$	$\tilde{y}=e^{x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$
16. $f(x)=\dfrac{1}{3}e^{-3x}\sin x$	$\tilde{y}=e^{-3x}(A\cos x+B\sin x)$
17. $f(x)=e^{-2x}(5\sin 3x-\cos 3x)$	$\tilde{y}=e^{-2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$
Примечание: в примерах 15-17 хоть и есть экспонента, но корни характеристического уравнения $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$ нас уже совершенно не волнуют – подбор частного решения идёт штатным образом без всяких домножений на «икс».	

<table>
<tr><td colspan="2">

II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю.

Такой диффур имеет вид $y'' + py' = f(x)$.
Пример: Рассмотрим подопытное неоднородное уравнение $y'' + 3y' = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ и найдем его корни: $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 0$

Получены различные действительные корни, один из которых равен нулю.
</td></tr>
<tr><td>Правая часть $f(x)$</td><td>В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Правило: Если в правой части $f(x)$ находится ненулевая константа или многочлен, и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то «очевидный» подбор частного решения необходимо домножить на «икс»:</td></tr>
<tr><td>18. $f(x) = -10$</td><td>$\tilde{y} = x \cdot A$, то есть частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax$</td></tr>
<tr><td>19. $f(x) = -2x$</td><td>$\tilde{y} = x \cdot (Ax + B)$, т.е. частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$</td></tr>
<tr><td>20. $f(x) = x^2 + 3$</td><td>$\tilde{y} = x \cdot (Ax^2 + Bx + C)$ или $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)$</td></tr>
<tr><td>21. $f(x) = x^3$</td><td>$\tilde{y} = x \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ или $\tilde{y} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если в правую часть входит экспонента или экспонента, умноженная на многочлен, то подбор частного решения следует проводить по тем же принципам, по которым он проведён в примерах № 5-8.
На всякий случай еще пара примеров:</td></tr>
<tr><td>22. $f(x) = (x^2 + 2x)e^{3x}$</td><td>Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{3}x}$ <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$
$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$</td></tr>
<tr><td>23. $f(x) = (1 - x)e^{-3x}$</td><td>Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{-3}x}$ совпал с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$. Поэтому «обычный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-3x}$ нужно домножить на «икс»:
$\tilde{y} = x(Ax + B)e^{-3x}$, то есть, искать частное решение в виде:
$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется точно так же, как уже разобрано – в штатном режиме см. Раздел I.</td></tr>
</table>

Дополнительный пример:

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка: $y''' - y'' = f(x)$. Для соответствующего однородного уравнения $y''' - y'' = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 1$.

Если получено **два кратных нулевых корня и в правой части** $f(x)$ **находится многочлен** (аналогично примерам № 18-21), то «штатный» подбор нужно домножать уже на x^2.
Например, если $f(x) = 3x$, то частное решение следует искать в виде:
$\tilde{y} = x^2 \cdot (Ax + B) = (Ax^3 + Bx^2)$

III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' - 4y' + 4y = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = 2$

Получены кратные (совпавшие) действительные корни.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
$f(x)$ – ненулевая константа или многочлен	Подбор частного решения следует осуществлять «штатным» способом точно так же, как в примерах №№1-4
24. $f(x) = 5e^x$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{1}\cdot x}$ не совпадает с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$ $\tilde{y} = Ae^x$
25. $f(x) = -2e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{2}x}$ **совпал** с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$. Поэтому очевидный подбор $\tilde{y} = Ae^{2x}$ следует домножить на x^2: $\tilde{y} = x^2 \cdot Ae^{2x}$ и искать частное решение в виде: $\tilde{y} = Ax^2e^{2x}$
26. $f(x) = (5x-1)e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{\boxed{2}x}$ **совпал** с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$. Поэтому «штатный» подбор $\tilde{y} = (Ax+B)e^{2x}$ следует домножить на x^2: $\tilde{y} = x^2 \cdot (Ax+B)e^{2x}$, то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$

Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется обычным образом – см. Раздел I.

IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причём $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + 6y' + 10y = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 6y' + 10y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$
Получены сопряженные комплексные корни с ненулевой действительной частью α.

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения?**
Подбор частного решения осуществляется очевидным образом (см. примеры № 1-6, 9-14) за исключением следующих видов правой части:	
27. $f(x) = 2e^{-3x}\sin 2x$	Проще всего объяснить так, берём правую часть и составляем сопряженные комплексные числа: $2e^{-3x}\sin 2x$ $-3 \pm 2i$ Полученные сопряженные комплексные числа $-3 \pm 2i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому частное решение следует искать в обычном виде: $\tilde{y} = e^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$
28. $f(x) = 2e^{-3x}\cos x$	Составляем сопряженные комплексные числа: $2e^{-3x}\cos(1\cdot x)$ $-3 \pm 1\cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $-3 \pm i$ **совпали** с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому «обычный» подбор частного решения следует домножить на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot e^{-3x}(A\cos x + B\sin x)$ или: $\tilde{y} = e^{-3x}(Ax\cos x + Bx\sin x)$
29. $f(x) = e^{x}(5\cos x - 3\sin x)$	$e^{1x}(5\cos(1\cdot x) - 3\sin(1\cdot x))$ $1 \pm 1\cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $1 \pm i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому частное решение ищем в виде: $\tilde{y} = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$
30. $f(x) = e^{-3x}(-\cos x + 2\sin x)$	$e^{-3x}(-\cos(1\cdot x) + 2\sin(1\cdot x))$ $-3 \pm 1\cdot i$ Составленные сопряженные комплексные числа $-3 \pm i$ **совпали** с корнями $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому: $\tilde{y} = x \cdot e^{-3x}(A\cos x + B\sin x) = e^{-3x}(Ax\cos x + Bx\sin x)$

V. Характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$

В таком диффуре отсутствует первая производная: $y'' + qy = f(x)$

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + 4y = f(x)$.
Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

Получены чисто мнимые сопряженные комплексные корни:

Правая часть $f(x)$	**В каком виде нужно искать частное решение** $\tilde{y}$ **неоднородного уравнения?**
Подбор частного решения осуществляется очевидным «штатным» образом, за исключением следующих видов правой части:	
31. $f(x) = \sin x$	Коэффициент $\sin(\boxed{1}\cdot x)$ не совпадает с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому частное решение ищем в обычном виде: $\tilde{y} = A\cos x + B\sin x$
32. $f(x) = -3\sin 2x$	Коэффициент $-3\sin\boxed{2}x$ **совпал** с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому при подборе «штатное» частное решение необходимо домножить на «икс»: $\tilde{y} = x\cdot(A\cos 2x + B\sin 2x)$, то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y} = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$
33. $f(x) = 2\cos 3x - 2\sin 3x$	Коэффициенты $2\cos\boxed{3}x - 2\sin\boxed{3}x$ не совпадают с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому частное решение ищем в обычном виде: $\tilde{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$
34. $f(x) = 2x\cos 2x - \sin 2x$	Коэффициенты $2x\cos\boxed{2}x - \sin\boxed{2}x$ **совпали** с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому при подборе очевидное частное решение опять же домножаем на «икс»: $\tilde{y} = x\cdot((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x)$, или: $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)\cos 2x + (Cx^2 + Dx)\sin 2x$
35. $f(x) = -3x\cos 4x$	Коэффициент $-3x\cos\boxed{4}x$ не совпадает с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm\boxed{2}i$, поэтому частное решение ищем в «штатном» виде: $\tilde{y} = (Ax + B)\cos 4x + (Cx + D)\sin 4x$

Краткие итоги по пяти разделам:

Тип корней характеристического уравнения	**Когда следует проявить ПОВЫШЕННОЕ ВНИМАНИЕ при подборе частного решения**
I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля	Если в правой части $f(x)$ находится экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 5-8)
II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю	Если в правой части $f(x)$ находится константа, многочлен, экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 18-23)
III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня	Если в правой части $f(x)$ находится экспонента или экспонента, умноженная на многочлен (примеры 24-26)
IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причём $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$	Если в уравнении есть правые части, разобранные в примерах 27-30: $f(x) = 2e^{-3x}\sin 2x$, $f(x) = 2e^{-3x}\cos x$, $f(x) = e^{x}(5\cos x - 3\sin x)$ и т.п.
V. Характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm\beta i$	Когда в правой части находится синус, косинус или синус и косинус одновременно; либо данные функции, умноженные на многочлены (многочлен) (примеры 31-35)