

**В каком виде искать частное решение
линейного неоднородного дифференциального уравнения
с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$?**

После долгих раздумий я принял решение создать отдельную справочную таблицу для подбора частного решения неоднородного ДУ. В методический материал сведены практически все типовые ситуации, которые могут встретиться на практике, кроме того, приведены случаи подбора частного решения для уравнений повышенной сложности.

Как всегда объяснения ведутся на конкретных примерах с минимумом формул и параметров. **Обязательно прочитайте выводы на последней странице!!!**

I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля.

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + y' - 2y = f(x)$

Для соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ и найдём его корни: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$

Итак, получены различные действительные корни, среди которых нет нуля.

Правая часть $f(x)$	В каком виде нужно искать частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения?
1. $f(x) = 4$ (или другая ненулевая константа)	$\tilde{y} = A$
2. $f(x) = 3x - 1$	$\tilde{y} = Ax + B$
3. $f(x) = x^2 - x$	$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C$
4. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 1$	$\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
<p>Примечание: обратите внимание, что когда в правой части $f(x)$ находится неполный многочлен, то частное решение подбирается <u>без пропусков степеней</u>, пример: $f(x) = -5x$ Это многочлен первой степени, и в нём отсутствует константа. Однако при подборе частного решения константу пропускать нельзя, то есть частное решение необходимо искать в виде $\tilde{y} = Ax + B$</p>	
5. $f(x) = 2e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{3x} <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -2$ или $\lambda_2 = 1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y} = Ae^{3x}$
6. $f(x) = (2x - 3)e^{-x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{-x} <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -2$ или $\lambda_2 = 1$ Подбор выполняем очевидным образом: $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-x}$
7. $f(x) = \frac{x}{2}e^{-2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{-2x} совпал с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -2$. В подобной ситуации «штатный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-2x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{-2x}$, то есть, искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-2x}$

8. $f(x) = e^x$	Коэффициент в показателе экспоненты: $e^{1 \cdot x}$ совпал с корнем характеристического уравнения $\lambda_2 = 1$. Аналогично: «штатный» подбор $\tilde{y} = Ae^x$ домножаем на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot Ae^x$, то есть ищем частное решение в виде: $\tilde{y} = Axe^x$
<p>Примечание: обратите внимание, что опять же в случае неполных многочленов <u>степени не теряются</u>, например, если $f(x) = 7x^2e^{5x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени и константа), то частное решение следует искать в виде $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$. Если $f(x) = (1 - x^2)e^{-2x}$ (в многочлене отсутствует «икс» в первой степени), то частное решение ищем в виде $\tilde{y} = x(Ax^2 + Bx + C)e^{-2x} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{-2x}$</p>	
9. $f(x) = \sin x$	$\tilde{y} = A \cos x + B \sin x$
10. $f(x) = -3 \cos 2x$	$\tilde{y} = A \cos 2x + B \sin 2x$
11. $f(x) = 2 \cos 3x - 4 \sin 3x$	$\tilde{y} = A \cos 3x + B \sin 3x$
<p>Примечание: в подборе частного решения всегда должен присутствовать <u>и синус и косинус</u> (даже если в правую часть $f(x)$ входит только синус или только косинус). Редко, но встречаются следующие похожие случаи:</p>	
12. $f(x) = -x \sin 5x$	$\tilde{y} = (Ax + B) \cos 5x + (Cx + D) \sin 5x$
13. $f(x) = (x - 1) \cos \frac{x}{2}$	$\tilde{y} = (Ax + B) \cos \frac{x}{2} + (Cx + D) \sin \frac{x}{2}$
14. $f(x) = x \cos x + 2 \sin x$	$\tilde{y} = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x$
И заключительные примеры, здесь тоже всё прозрачно:	
15. $f(x) = 2e^x \sin 2x$	$\tilde{y} = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$
16. $f(x) = \frac{1}{3} e^{-3x} \sin x$	$\tilde{y} = e^{-3x} (A \cos x + B \sin x)$
17. $f(x) = e^{-2x} (5 \sin 3x - \cos 3x)$	$\tilde{y} = e^{-2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$
<p>Примечание: в примерах 15-17 хоть и есть экспонента, но корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ нас уже совершенно не волнуют – подбор частного решения идёт штатным образом без всяких домножений на «икс».</p>	

II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю.

Такой диффур имеет вид $y'' + py' = f(x)$.

Пример: Рассмотрим подопытное неоднородное уравнение $y'' + 3y' = f(x)$.

Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 3y' = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda = 0$ и найдем его корни: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 0$

Получены различные действительные корни, один из которых равен нулю.

Правая часть $f(x)$	В каком виде нужно искать частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения?
Правило: Если в правой части $f(x)$ находится ненулевая константа или многочлен, и один из корней характеристического уравнения равен нулю, то «очевидный» подбор частного решения необходимо домножить на «икс»:	
18. $f(x) = -10$	$\tilde{y} = x \cdot A$, то есть частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax$
19. $f(x) = -2x$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax + B)$, т.е. частное решение ищем в виде $\tilde{y} = Ax^2 + Bx$
20. $f(x) = x^2 + 3$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax^2 + Bx + C)$ или $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)$
21. $f(x) = x^3$	$\tilde{y} = x \cdot (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$ или $\tilde{y} = (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx)$
Если в правую часть входит экспонента или экспонента, умноженная на многочлен , то подбор частного решения следует проводить по тем же принципам, по которым он проведён в примерах № 5-8. На всякий случай еще пара примеров:	
22. $f(x) = (x^2 + 2x)e^{3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{3x} <u>не совпадает</u> с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$ $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$
23. $f(x) = (1 - x)e^{-3x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{-3x} совпал с корнем характеристического уравнения $\lambda_1 = -3$. Поэтому «обычный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{-3x}$ нужно домножить на «икс»: $\tilde{y} = x(Ax + B)e^{-3x}$, то есть, искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^{-3x}$
Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется точно так же, как уже разобрано – в штатном режиме см. Раздел I .	

Дополнительный пример:

Рассмотрим дифференциальное уравнение третьего порядка: $y''' - y'' = f(x)$. Для соответствующего однородного уравнения $y''' - y'' = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 1$.

Если получено **два кратных нулевых корня и в правой части $f(x)$ находится многочлен** (аналогично примерам № 18-21), то «штатный» подбор нужно домножать уже на x^2 .

Например, если $f(x) = 3x$, то частное решение следует искать в виде:

$$\tilde{y} = x^2 \cdot (Ax + B) = (Ax^3 + Bx^2)$$

III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' - 4y' + 4y = f(x)$.

Для соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = 2$

Получены кратные (совпавшие) действительные корни.

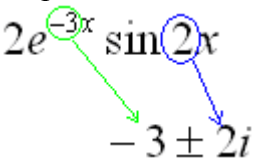
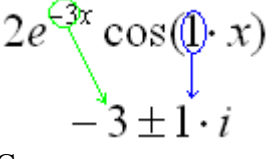
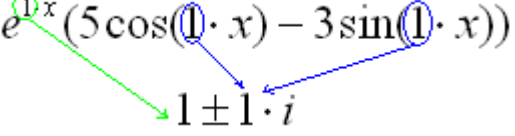
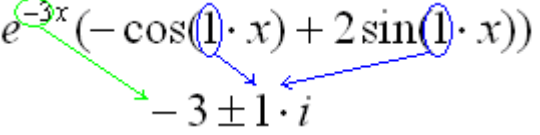
Правая часть $f(x)$	В каком виде нужно искать частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения?
$f(x)$ – ненулевая константа или многочлен	Подбор частного решения следует осуществлять «штатным» способом точно так же, как в примерах №№1-4
24. $f(x) = 5e^x$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{1x} <u>не совпадает</u> с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$ $\tilde{y} = Ae^x$
25. $f(x) = -2e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{2x} <u>совпал</u> с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$. Поэтому очевидный подбор $\tilde{y} = Ae^{2x}$ следует домножить на x^2 : $\tilde{y} = x^2 \cdot Ae^{2x}$ и искать частное решение в виде: $\tilde{y} = Ax^2e^{2x}$
26. $f(x) = (5x - 1)e^{2x}$	Коэффициент в показателе экспоненты: e^{2x} <u>совпал</u> с кратным корнем характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 2$. Поэтому «штатный» подбор $\tilde{y} = (Ax + B)e^{2x}$ следует домножить на x^2 : $\tilde{y} = x^2 \cdot (Ax + B)e^{2x}$, то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$
Если правая часть $f(x)$ имеет вид из примеров № 9-17, то подбор осуществляется обычным образом – см. Раздел I .	

IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причём $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + 6y' + 10y = f(x)$.

Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 6y' + 10y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$

Получены сопряженные комплексные корни с ненулевой действительной частью α .

Правая часть $f(x)$	В каком виде нужно искать частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения?
Подбор частного решения осуществляется очевидным образом (см. примеры № 1-6 , 9-14) за исключением следующих видов правой части:	
27. $f(x) = 2e^{-3x} \sin 2x$	<p>Проще всего объяснить так, берём правую часть и составляем сопряженные комплексные числа:</p> $2e^{-3x} \sin 2x$  <p>Полученные сопряженные комплексные числа $-3 \pm 2i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому частное решение следует искать в обычном виде: $\tilde{y} = e^{-3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$</p>
28. $f(x) = 2e^{-3x} \cos x$	<p>Составляем сопряженные комплексные числа:</p> $2e^{-3x} \cos(1 \cdot x)$  <p>Составленные сопряженные комплексные числа $-3 \pm i$ совпали с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому «обычный» подбор частного решения следует домножить на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot e^{-3x}(A \cos x + B \sin x)$ или: $\tilde{y} = e^{-3x}(Ax \cos x + Bx \sin x)$</p>
29. $f(x) = e^x(5 \cos x - 3 \sin x)$	<p>$e^{1x}(5 \cos(1 \cdot x) - 3 \sin(1 \cdot x))$</p>  <p>Составленные сопряженные комплексные числа $1 \pm i$ <u>не совпадают</u> с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому частное решение ищем в виде: $\tilde{y} = e^x(A \cos x + B \sin x)$</p>
30. $f(x) = e^{-3x}(-\cos x + 2 \sin x)$	<p>$e^{-3x}(-\cos(1 \cdot x) + 2 \sin(1 \cdot x))$</p>  <p>Составленные сопряженные комплексные числа $-3 \pm i$ совпали с корнями $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$, поэтому: $\tilde{y} = x \cdot e^{-3x}(A \cos x + B \sin x) = e^{-3x}(Ax \cos x + Bx \sin x)$</p>

V. Характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$

В таком диффуре отсутствует первая производная: $y'' + qy = f(x)$

Пример: Рассмотрим неоднородное уравнение $y'' + 4y = f(x)$.

Для соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y = 0$ составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ и найдем его корни: $\lambda_{1,2} = \pm 2i$

Получены чисто мнимые сопряженные комплексные корни:

Правая часть $f(x)$	В каком виде нужно искать частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения?
Подбор частного решения осуществляется очевидным «штатным» образом, за исключением следующих видов правой части:	
31. $f(x) = \sin x$	Коэффициент $\sin(1 \cdot x)$ <u>не совпадает</u> с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm 2i$, поэтому частное решение ищем в обычном виде: $\tilde{y} = A \cos x + B \sin x$
32. $f(x) = -3 \sin 2x$	Коэффициент $-3 \sin 2x$ <u>совпал</u> с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm 2i$, поэтому при подборе «штатное» частное решение необходимо домножить на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot (A \cos 2x + B \sin 2x)$, то есть искать частное решение в виде: $\tilde{y} = Ax \cos 2x + Bx \sin 2x$
33. $f(x) = 2 \cos 3x - 2 \sin 3x$	Коэффициенты $2 \cos 3x - 2 \sin 3x$ <u>не совпадают</u> с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm 2i$, поэтому частное решение ищем в обычном виде: $\tilde{y} = A \cos 3x + B \sin 3x$
34. $f(x) = 2x \cos 2x - \sin 2x$	Коэффициенты $2x \cos 2x - \sin 2x$ <u>совпали</u> с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm 2i$, поэтому при подборе очевидное частное решение опять же домножаем на «икс»: $\tilde{y} = x \cdot ((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x)$, или: $\tilde{y} = (Ax^2 + Bx) \cos 2x + (Cx^2 + Dx) \sin 2x$
35. $f(x) = -3x \cos 4x$	Коэффициент $-3x \cos 4x$ <u>не совпадает</u> с коэффициентом при характеристических сопряженных комплексных корнях $\pm 2i$, поэтому частное решение ищем в «штатном» виде: $\tilde{y} = (Ax + B) \cos 4x + (Cx + D) \sin 4x$

Краткие итоги по пяти разделам:

Тип корней характеристического уравнения	Когда следует проявить ПОВЫШЕННОЕ ВНИМАНИЕ при подборе частного решения
I. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, отличных от нуля	Если в правой части $f(x)$ находится <u>экспонента</u> или <u>экспонента, умноженная на многочлен</u> (примеры 5-8)
II. Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня, один из которых равен нулю	Если в правой части $f(x)$ находится <u>константа, многочлен, экспонента</u> или <u>экспонента, умноженная на многочлен</u> (примеры 18-23)
III. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня	Если в правой части $f(x)$ находится <u>экспонента</u> или <u>экспонента, умноженная на многочлен</u> (примеры 24-26)
IV. Характеристическое уравнение имеет сопряженные комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причём $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$	Если в уравнении есть правые части, разобранные в примерах 27-30 : $f(x) = 2e^{-3x} \sin 2x$, $f(x) = 2e^{-3x} \cos x$, $f(x) = e^x(5 \cos x - 3 \sin x)$ и т.п.
V. Характеристическое уравнение имеет сопряженные, чисто мнимые комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$	Когда в правой части находится <u>синус, косинус</u> или <u>синус и косинус</u> одновременно; либо <u>данные функции, умноженные на многочлены</u> (многочлен) (примеры 31-35)